Záródolgozat
Rátz László Vándorgyűlés, Keszthely
2014.

Lányi Veronika
Janus Pannonius Gimnázium
Pécs

ÖSSZEFUTÓ EGYENESEK, KOLLINEÁRIS PONTOK, AVAGY: CEVA, MENELAOSZ ÉS ....

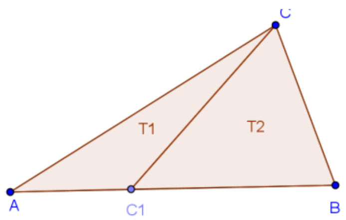
Ahogy Ceva tétele először beköszön:

Amikor a területekkel bíbelődünk hatodikban és hetedikben, már izgalmas lehet az a játék, amit eljátszhatunk az ABC háromszög összefutó Ceva-szakaszaival. Tapasztalatom szerint, bár tud mindent egy hatodikos is ahhoz, hogy legalább a „belső pontos Ceva-tételt" belássa, mégis igaziból ez a játék csak később érik be. Ha szórakozunk is a területekkel hatodikban-hetedikben, a cél csak az előkészítés, az összefüggés ismerete, a bizonyítás szépsége, hogy annál nagyobb legyen majd a boldogság, amikor az összefutó egyenesek találkozási pontja kiszabadul a háromszögből és egy sokkal általánosabb alkalmazáshoz vezet. Az első lépés az én felfogásomban az alábbi alapeset:

1. feladat:

Bizonyítsuk be, hogy ha az ABC háromszögben az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek,(az úgy nevezett Ceva-szakaszok) egy pontban metszik egymást, akkor a háromszög oldalain keletkező szakaszokra igaz, hogy

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=1.$$ Ez Ceva tétele.

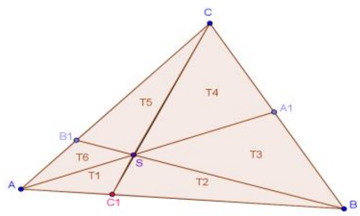


Bizonyítás: Tudjuk, hogy bármely háromszögben

$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{T_1}{T_2}$$, ugyanis AC_1C_Δ és C_1BC_Δ C csúcsból induló magassága ugyanaz. Ezt felhasználva:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{T_1}{T_2}\cdot\frac{T_3}{T_4}\cdot\frac{T_5}{T_6}=1$$ lenne a bizonyítandó.

Azaz elegendő belátni, hogy $T_1T_3T_5=T_2T_4T_6$.



Tekintsük az AA_1 Ceva szakaszt először a B, majd a C csúccsal! Majd vegyük a BB_1 Ceva-szakaszt először a C, majd az A csúccsal! Végül pedig a CC_1 Ceva-szakaszt először az A, majd a B csúccsal!

$$\frac{AS}{SA_1}:\quad \frac{T_1+T_2}{T_3}=\frac{T_5+T_6}{T_4}$$
$$\frac{BS}{SB_1}:\quad \frac{T_3+T_4}{T_5}=\frac{T_1+T_2}{T_6}$$
$$\frac{CS}{SC_1}:\quad \frac{T_5+T_6}{T_1}=\frac{T_3+T_4}{T_2}$$

Az egyenlőségek megfelelő oldalait összeszorozva, megkapjuk a bizonyítandót: $T_1T_3T_5=T_2T_4T_6$.

A Ceva-tétel megfordításának bizonyítása a dolgozat későbbi részében is olvasható, itt csak annyit érdemes talán megemlíteni, hogy indirekt stratégiával hamar célhoz lehet érni.
A témához kapcsolódó feladatok egy darabig nem is kívánnak többet, mint a belső pontos Ceva-tétel. A súlypont, létezése, a belső szögfelezők egy ponton való áthaladása, a Nagel-pont és Gergonne-pont létezése, a kerületfelező egyenesek egy ponton való áthaladása, sőt a Lemoine-pont is és még sok egyéb, a fenti komplikációmentes esettel vizsgálható, a szakaszarány gyorsan tanulható, a tételnek ritmusa van, akár le is táncolható. (Mellesleg a folyosón, kőlapokra rajzolt nagy Ceva-háromszöggel a gyerekekkel le is ugráltuk, és igen hamar tanulható volt a „csúcstól metszéspontig-metszésponttól csúcsig........” eljárás.

Ez mind gyönyörű, de hamar megbukik a mutatvány, ha szembejön példának okáért egy „András Szilárd-feladat”, ahol már annak az igazságát is jó lenne látni, hogy valójában nem kell megkövetelnünk a Ceva-szakaszoktól, hogy csakis belső pontban messék a háromszög oldalait. Azaz az összefutási pont lehet a háromszögön kívül is. Így kitárul a probléma az összefutó egyenesekre, és bár levezethető, mégsem csábító, hogy területekkel bizonyítsuk be. (Kipróbáltam; megfogadtam, hogy „soha többet....”)

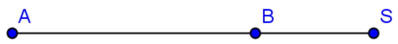
Általánosabb eszköz után érdemes nyúlni. Elsősorban Ábrahám Gábor unszolására ütöttem fel Reiman István Geometria és határterületei című könyvét, ahol ezt az általánosabb eszközt emberbarát tárgyalásban lehet megtalálni.
Ez az eszköz lesz az osztóviszony.

Az osztóviszony

Ha rögzítjük egy egyenes három pontját, A, B, S, ahol $S \neq B$, akkor az AB egyenes bármely B-től különböző pontjának a helyzetét egyértelműen megadhatjuk az $\frac{AS}{SB}$ aránnyal. Ezt az arányt osztóviszonynak nevezzük és (ABS) –sel jelöljük.

1. ábra

Az osztóviszony pozitív, ha $\overrightarrow{AS}$ és $\overrightarrow{SB}$ egyirányúak, azaz, ha S az AB szakaszon belül van, és az (ABS) osztóviszony negatív, ha $\overrightarrow{AS}$ és $\overrightarrow{SB}$ ellentétes irányúak, azaz ha S az AB szakaszon kívül van.

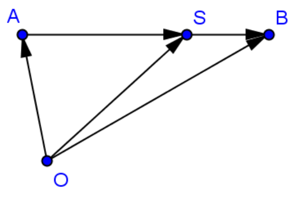


2. ábra

Ha S=A, akkor (ABS)=0, mivel az S=B esetben az osztóviszonyt nem értelmezzük, ezért az (ABS) sosem lesz -1.

Legyen $\mathcal{O}$ az AB egyenes kívül fekvő vonatkoztatási pont. Tudjuk, hogy $(ABS)=\frac{\mu}{\lambda}$. $\overrightarrow{OA}=\underline{a}$; $\overrightarrow{OB}=\underline{b}$; $\overrightarrow{OS}=\underline{s}$.

Ekkor $\underline{s}$ előállítható $\underline{a}$ és $\underline{b}$ lineáris kombinációjával.



3. ábra

$$\frac{\overrightarrow{AS}}{\overrightarrow{SB}}=\frac{\underline{s}-\underline{a}}{\underline{b}-\underline{s}}=\frac{\mu}{\lambda};$$

$$\lambda(\underline{s}-\underline{a})=\mu(\underline{b}-\underline{s})$$

$$\Rightarrow \lambda\underline{s}-\lambda\underline{a}=\mu\underline{b}-\mu\underline{s} \;\Rightarrow (\lambda+\mu)\underline{s}=\mu\underline{b}+\lambda\underline{a} \;\Rightarrow \underline{s}=\frac{\mu\underline{b}+\lambda\underline{a}}{\lambda+\mu}$$

Így ez nem más, mint egy kéttagú súlyozott számtani közép. B pont súlya μ, A pont súlya pedig λ. A súlyozott számtani közép szétbontható úgy, hogy a kívánt lineáris kombináció jól látható legyen. $\underline{s}=\frac{\mu\underline{b}+\lambda\underline{a}}{\lambda+\mu}=\frac{\mu}{\lambda+\mu}\underline{b}+\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\underline{a}$

Legyen $\frac{\lambda}{\lambda+\mu}=\alpha$. Ekkor $\underline{s}=\alpha\underline{a}+(1-\alpha)\underline{b}$. Ez olyan lineáris kombináció, amelyben az együtthatók összege 1.

<u>Általánosítva:</u> Súlyozott pontrendszernek nevezünk egy $A_1, A_2, \ldots A_n$ ponthalmazt, ha pontjaihoz rendre a $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ súlyokat rendeljük úgy, hogy a súlyok összege ne legyen 0. A súlyozott pontrendszer súlypontjának azt az S pontot nevezzük, amelynek helyvektora $\underline{s}=\frac{\mu_1\underline{a_1}+\mu_2\underline{a_2}+\ldots\ldots+\mu_n\underline{a_n}}{\mu_1+\mu_2+\ldots\ldots+\mu_n}$. Ezeket a súlyokat, amelyekkel a ponthalmaz pontjait, más néven az alappontokat súlyoznunk kell, ha azt akarjuk, hogy súlypontjuk az adott S pont legyen, *baricentrikus (súlyponti) koordinátáknak* nevezzük. Az egyes baricentrikus koordinátáknak nincs közvetlen jelentésük, a pont helyzetét viszonyuk határozza meg. Az ilyen tulajdonságú koordinátákat *viszonykoordinátáknak* mondjuk.

Belátható, hogy a súlypont helyzete nem függ az $\mathcal{O}$ választásától.

A súlypont szerkesztésére, illetve elhelyezkedésére jól használható az úgy nevezett :

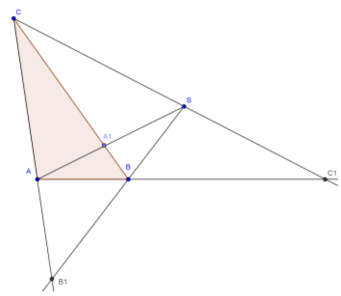
<u>Súlypontszerkesztési tétel:</u>

Ha egy súlyozott pontrendszert két, <u>közös pont nélküli</u> ponthalmazra vágunk szét, és az egyik súlypontja S_1, valamint a benne lévő pontok súlyainak összege μ', a másik rész súlypontja S_2 és az ebben lévő pontok súlyainak összege μ'', akkor a teljes pontrendszer S súlypontja az S_1S_2 egyenesen van és $(S_1S_2S)=\mu''/\mu'$.

A sík bármely pontjának baricentrikus koordinátákkal való jellemzéséhez elegendő felvenni a síkon három, nem kollienáris pontot. Ezek az *alapháromszög* csúcsai. Így a sík minden pontjának vannak baricentrikus koordinátái.

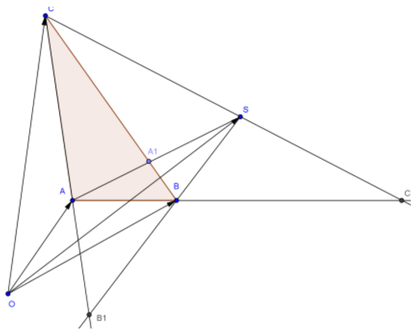
A három pontból álló súlyozott pontrendszer súlypontja - és Ceva tétele

Legyen ABC egy tetszőleges háromszög és S *a **háromszög a síkjának*** olyan pontja, mely egyik oldalegyenesen sincs rajta. Ebben az esetben a csúcsokhoz hozzárendelhetők olyan súlyok, hogy az S pont a kérdéses súlyozott pontrendszer súlypontja lesz.



Ugyanis: Ha A, B, C, S helyvektorai rendre $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{s}$, akkor mivel $\underline{s}-\underline{a}$ és $\underline{s}-\underline{b}$ nem párhuzamos vektorok, ezért az $\underline{s}-\underline{c}$ előállítható ezek lineáris kombinációjaként.

$$\underline{s}-\underline{c}=\alpha(\underline{s}-\underline{a})+\beta(\underline{s}-\underline{b}).$$



$\underline{s}-\underline{c}=\alpha\underline{s}-\alpha\underline{a}+\beta\underline{s}-\beta\underline{b}\ \rightarrow\ (\alpha+\beta-1)\underline{s}=\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}-\underline{c}\ \rightarrow$

$$\underline{s}=\frac{\alpha\underline{a}+\beta\underline{b}-\underline{c}}{\alpha+\beta-1}\ .$$

(A nevező nem lehet 0, hiszen β nem lehet $1-\alpha$, mert az azt jelentené, hogy A, B, C egy egyenesen lennének.

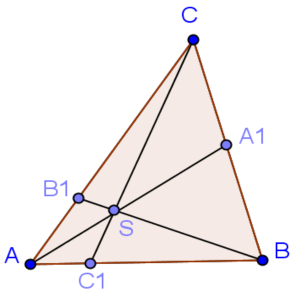
Hiszen $\underline{s}-\underline{c}=\alpha\underline{s}-\alpha\underline{a}+(1-\alpha)\underline{s}-(1-\alpha)\underline{b}\ \rightarrow$

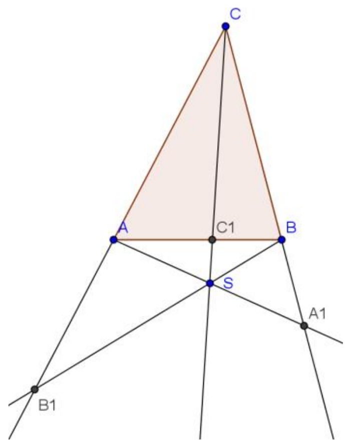
$\alpha(\underline{a}-\underline{b})=\underline{c}-\underline{b}$ lenne, ami nem igaz.)

Az $\underline{s}$ előállításában így α, β, (-1) súlyok szerepelnek. Tudunk választani olyan λ, μ, ν súlyokat, hogy a $\lambda:\mu:\nu=\alpha:\beta:(-1)$ teljesül. Ezzel az $\underline{s}=\dfrac{\lambda\underline{a}+\mu\underline{b}+\nu\underline{c}}{\lambda+\mu+\nu}$ előállítás némiképp általánosabb, szimmetrikusabb, szebb.

Valamint fontos észrevenni, hogy a súlypontszerkesztési tétel értelmében S úgy is előállítható, hogy vesszük az AB egyenesnek azt a C_1 pontját, amelyre $(ABC_1)=\dfrac{\mu}{\lambda}$, így a C_1C szakaszt $\dfrac{\nu}{\lambda+\mu}$ arányban osztó pont lesz az S. A CS egyenes tehát olyan C_1 pontban metszi a C-vel szemközti oldalegyenest, amelyre $(ABC_1)=\dfrac{\mu}{\lambda}$. Ugyanilyen gondolattal, a BS egyenes olyan B_1 pontban metszi a B-vel szemközti oldalegyenest, amelyre $(CAB_1)=\dfrac{\lambda}{\nu}$, AS pedig a BC oldalegyenest olyan A1-ben, amelyre $(BCA_1)=\dfrac{\nu}{\mu}$. Így arra az eredményre jutunk, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)=\dfrac{\mu}{\lambda}\cdot\dfrac{\nu}{\mu}\cdot\dfrac{\lambda}{\nu}=1$. Azaz $\dfrac{AC_1}{C_1B}\cdot\dfrac{BA_1}{A_1C}\cdot\dfrac{CB_1}{B_1A}=1$.

Vagyis ha az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyenesein C_1, A_1, B_1 olyan pontok, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban (S) metszik egymást, akkor $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)=1$. ***<u>Ez Ceva tétele</u>.***





Bizonyítás:

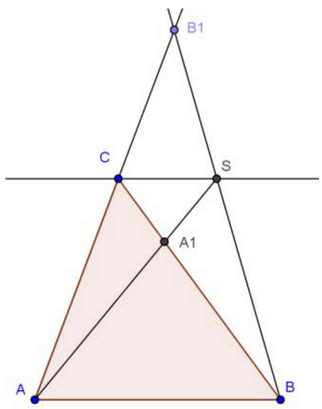
Legyen ABC háromszög a baricentrikus koordinátarendszer alapháromszöge és legyenek α, β, γ az S pont baricentrikus koordinátái. Ekkor $(ABC_1)=\frac{\beta}{\alpha}$, $(BCA_1)=\frac{\gamma}{\beta}$, $(CAB_1)=\frac{\alpha}{\gamma}$. Ezek szorzata valóban 1.

Ceva tételének megfordítása: Ha C_1, A_1, B_1 az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyeneseinek olyan pontjai, melyekre igaz, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)=1$, akkor az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek vagy egy ponton mennek át, vagy párhuzamosak.

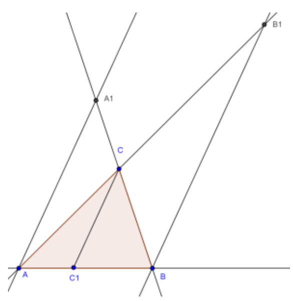
Ennek bizonyítására elegendő megmutatnunk, hogy ha az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek közül kettő metszi egymást, akkor a harmadik is átmegy ezek metszéspontján, amennyiben teljesül, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)=1$. Válogassuk le az eseteket!

1. eset:

Ha például AA_1 és BB_1 metszéspontja S, és feltesszük, hogy CS egyenes nem metszi AB-t, azaz CS párhuzamos AB-vel, akkor vagy B_1 vagy A_1 az ABC háromszögön kívül helyezkedik el. Vegyük azt az esetet, hogy B_1 a külső pont. Ekkor A_1 belső pontja a BC oldalnak, B_1 az AC oldalegyenes C-n túli pontja úgy, hogy S belső pontja a BB_1 szakasznak. Így CSB_1 háromszög hasonló ABB_1 háromszöghöz. Ezért $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{AB}{CS}$. Továbbá ABA_1 háromszög hasonló CSA_1 háromszöghöz és ezért $\frac{CS}{AB}=\frac{CA_1}{A_1B}$. E két



egyenlőséget összevetve $\frac{AB_1}{B_1C}=\frac{A_1B}{CA_1}$, azaz $(ACB_1)=\frac{1}{(CBA_1)}$ lenne. Mivel (ACB_1) negatív, ugyanis AB_1 és B_1C ellentétes irányúak, továbbá (CBA_1) pedig pozitív, ugyanis CA_1 és A_1B azonos irányúak, ezért figyelembe véve az előjeleket is, elmondható, hogy $(ACB_1)(CBA_1)=-1$. Vagyis ha az alapháromszögben két oldalhoz tartozó osztóviszony szorzata -1 –gyel egyenlő, akkor a Ceva transzverzálisok metszéspontja a harmadik oldallal szemközti csúcson áthaladó, a harmadik oldallal párhuzamos egyenesen van.

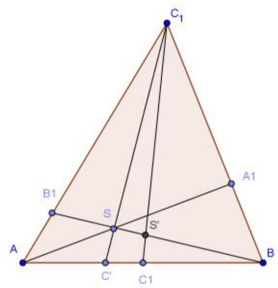


2. eset:

Fontos látni, hogy lehetséges olyan eset, amikor a három Ceva-szakasz párhuzamos egymással és az osztóviszony-szorzat 1-gyel egyenlő. A párhuzamos szelők tételét és a hasonlóságokat alkalmazva látható, hogy az osztóviszony-szorzat valóban 1 lesz.

3. eset:

Már csak azt kell látni, hogy ha $AA_1 \cap BB_1 = S$, akkor CC_1 szükségszerűen áthalad ezen az S ponton, azaz a Ceva-szakaszok egy ponton mennek át. Indirekt úton ez hamar belátható. Tegyük fel ugyanis, hogy létezik S_1, mely különbözik S-től és $BB_1 \cap CC_1 = S_1$. Ekkor létezik C*, hogy CC* átmegy S-en, így teljesül az AA1, BB1 és CC* szakaszokra, hogy egy ponton mennek át. (S). Ezzel igaz, hogy $(ABC^*)(BCA_1)(CAB_1)=1$. Vagyis $\frac{AC^*}{C^*B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Az



indirekt feltevés szerint azonban $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)=1$ azaz $\frac{AC_1}{C_1B} \cdot \frac{BA_1}{A_1C} \cdot \frac{CB_1}{B_1A} = 1$.

Ebből az következne, hogy $\frac{AC^*}{C^*B} = \frac{AC_1}{C_1B}$, ami azonban azt jelenti, hogy $C^* \equiv C_1$, tehát $S_1 \equiv S$, így, ha az osztóviszonyok szorzata 1, akkor a három Ceva-transzverzális csakis egy ponton halad át és ez a pont. S.

A kollinearitás kérdése - Menelaosz tétele

A két tételt, Ceva és Menelaosz tételét általában együtt szoktuk tanítani, mert jellegük nagyon hasonló. Mindkét tétel osztóviszony-szorzattal ragadható meg, csak míg Ceva tételét az egy ponton való áthaladás bizonyításakor, addig Menelaoszét a kollinearitás bizonyításakor használjuk.

Ahogy Menelaosz beköszön:

Menelaosz tétele eredetileg (általános iskolában, vagy kilencedikben) nem osztóviszonnyal köszön be, hanem hasonlósággal és olyan metsző egyenessel, amely a háromszög két oldalát belső pontban, egyet pedig külső pontban metsz. Akár a Ceva, akár a Menelaosz tétel „beköszönő" formáit és bizonyításait jónak és hasznosnak tartom, mert a kiterjesztés, az általánosabb forma jobban is értékelhető és jobban is megjegyezhető, könnyebben alkalmazható ezek után.

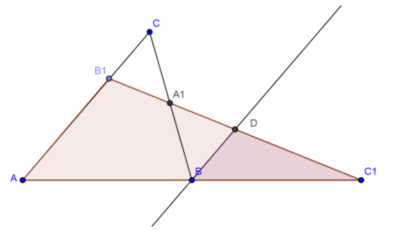
A beköszönő Menelaosz-tételnél irányított szakaszokról beszélünk, aminek ebben a pillanatban a gyerek sok értelmét nem látja, de elfogadja, pláne, hogy a tétel bizonyításánál az előjeltől szabadul meg a legkönnyebben.

Messe egy egyenes az ABC háromszög BC, CA oldalait a csúcsoktól különböző A_1, B_1 pontban, az AB oldalegyenest pedig C_1 pontban. Ekkor a keletkező előjeles szakaszokra igaz:

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$ *Ez Menelaosz tétele.*

Bizonyítás:

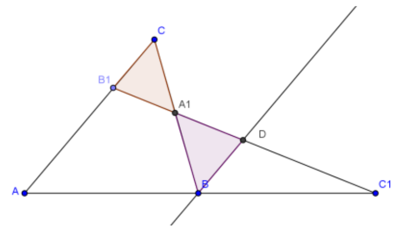
A negatív előjel könnyen látható, hiszen a szereplő előjeles szakaszok között csakis egy lesz negatív: C_1B. Jó lenne hasonló háromszögeket találni a szakaszarányokhoz, de alaphelyzetben egy sincs. Ha nincs, hát „csináljunk”! Stratégia: Húzzunk AC oldallal párhuzamost a B csúcson keresztül! Így keletkezik a D metszéspont. Ekkor már két-két hasonló háromszöget is találunk.



$AC_1B_{1\Delta} \sim BC_1D_\Delta$, valamint $BDA_{1\Delta} \sim CB_1D_\Delta$.

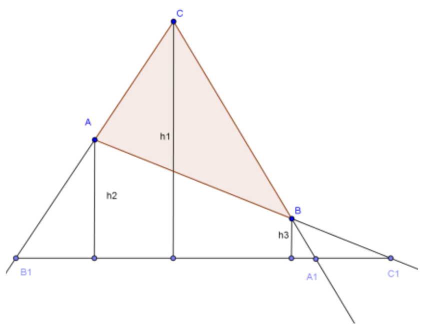
$$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{AB_1}{BD},$$

valamint $$\frac{BA_1}{A_1C}=\frac{BD}{CB_1}.$$



Így $$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{AB_1}{BD}\cdot\frac{BD}{CB_1}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=-1.$$

Ezzel Menelaosz tételét beláttuk. Valójában a tétel ennél sokkal többre képes, hiszen a megfordítása is igaz, valamint nem kell a hasonlósággal sem sokat bíbelődni, ha a metsző egyenes csupán az oldalegyeneseket metszi. Ekkor Menelaosz metsző egyenesére a háromszög csúcsaiból merőlegeseket bocsátva, a keletkező háromszögmagasság-szakaszokra tudunk váltani.



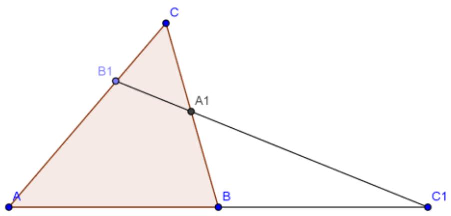
Ekkor: $$\frac{AC_1}{C_1B}=\frac{h_2}{h_3};\quad \frac{BA_1}{A_1C}=\frac{h_3}{h_1};\quad \frac{CB_1}{B_1A}=\frac{h_1}{h_2}$$

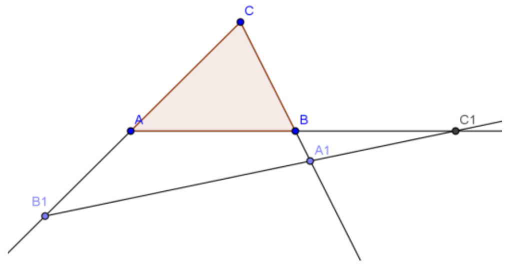
Így : $$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{h_2}{h_3}\cdot\frac{h_3}{h_1}\cdot\frac{h_1}{h_2}=1.$$ Az előjelet ismét C_1B szakasz adja meg.

A „beköszönés” után adódnak olyan feladatok, ahol pontosan a kollinearitás bizonyítása lenne a feladat, azaz szükségessé válik a Menelaosz-tétel megfordításának bizonyítása, valamint a Ceva-rokonság miatt az osztóviszony felhasználása. Célszerű a tételt szükséges és elegendő formában kimondani és a bizonyításokat már az osztóviszony alkalmazásával elvégezni.

Menelaosz tétele:

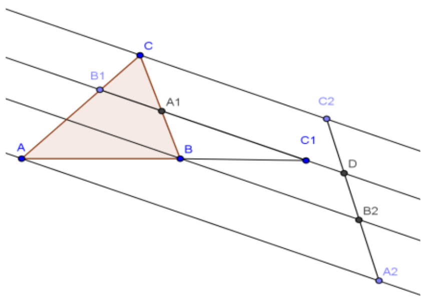
Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalegyeneseinek a csúcsoktól különböző C_1, A_1, B_1 pontjai, akkor és csakis akkor vannak egy egyenesen, ha $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)= - 1$.





Húzzunk az $A_1B_1C_1$ egyenessel párhuzamost A-n, B-n és C-n át. Messe egy egyenes, mely egyik háromszögoldallal sem párhuzamos, ezeket a párhuzamos egyeneseket! A keletkező A_2, B_2, C_2 és D pontok mind különbözők, mert az $A_1B_1C_1$ egyenes nem halad át egy csúcson sem és egyik oldalegyenessel sem párhuzamos.

A párhuzamos szelők tétele értelmében az $A_2B_2DC_2$ egyenesen keletkező osztóviszonyok ugyanakkorák, mint a háromszögnél, a tételben szereplő osztóviszonyok. $(ABC_1)=(A_2B_2D)$: negatív; $(BCA_1)=(B_2C_2D)$: pozitív; $(CAB_1)=(C_2A_2D)$: pozitív. Így lesz a leendő szorzat előjele negatív.



$$(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1) = (A_2B_2D)(B_2C_2D)(C_2A_2D) =$$

$$\frac{A_2D}{DB_2}\cdot\frac{B_2D}{DC_2}\cdot\frac{C_2D}{DA_2}=-1$$

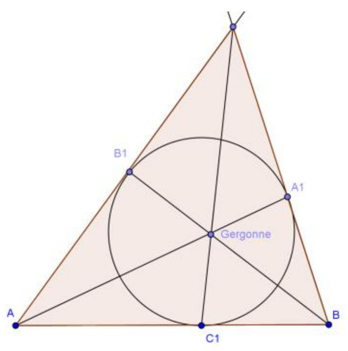
Megfordítás: *Ha az ABC háromszög BC, CA, AB oldalain a csúcsoktól különböző A_1, B_1, C_1 pontok úgy helyezkednek el, hogy $(ABC_1)(BCA_1)(CAB_1)= - 1$, akkor A_1 B_1 C_1 pontok egy egyenesen vannak.*

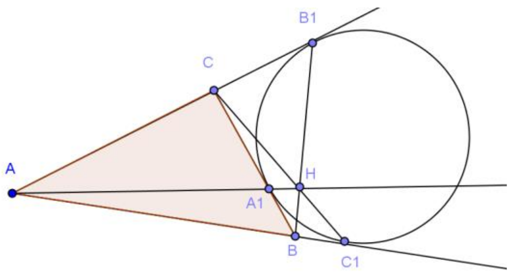
Bizonyítása: Először jegyezzük meg, hogy A_1B_1 nem lehet párhuzamos AB-vel, mert akkor $(ABC_1)= -1$ lenne,ami lehetetlen.

Indirekt úton tegyük fel, hogy A_1, B_1, C_1 nem kollineáris. Ekkor létezik C*, amelyre már A_1, B_1, C* kollineáris. Ekkor igaz rájuk a Menelaosz tétel szükségességi része, azaz $(ABC^*)(BCA_1)(CAB_1)= - 1$. Így $(ABC^*)=(ABC_1)$, ami csak akkor lehetséges, ha $C^*=C_1$.

FELADATOK:

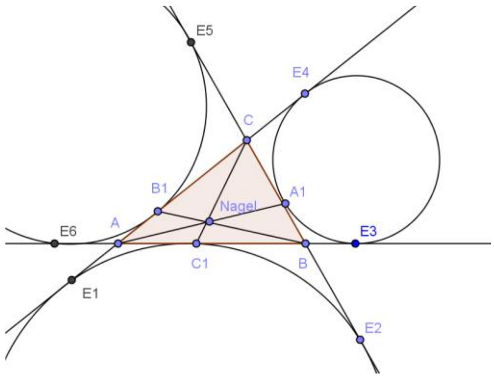
1. Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban metszik egymást! (Gergonne-pont)





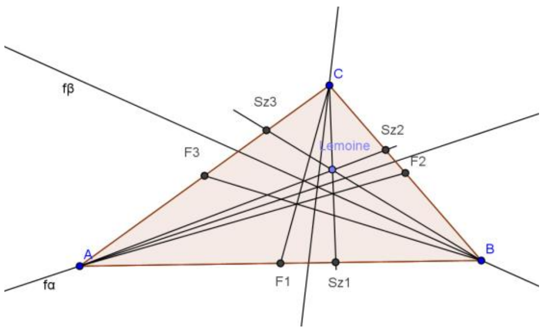
2. Az ABC háromszög *a* oldalát érintő hozzáírt köre érintési pontja legyen az *a* oldalon A_1, a *b* oldalegyenesen B_1, a *c* oldalegyenesen pedig C_1. Bizonyítsuk be, hogy AA_1, BB_1, CC_1 egy ponton mennek át!

3. Az ABC háromszög oldalait érintő hozzáírt körök érintési pontjait kössük össze a háromszög szemközti csúcspontjaival! Bizonyítsuk be, hogy ezek a transzverzálisok egy ponton mennek át! (Nagel-pont)



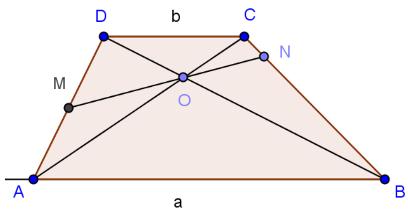
4. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög belső szögfelező egyenesei egy ponton mennek át!
5. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög kerületfelező egyenesei egy ponton mennek át!
6. Bizonyítsuk be, hogy ha AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-egyenesek, és mindegyiket tükrözzük a velük egy csúcsból induló szögfelezőre, akkor a tükörképek is egy pontra illeszkednek!

7. Igazoljuk, hogy a háromszög három szimediánja egy ponton megy át! (Lemoine-pont) (Szimedián: Ha tükrözzük a súlyvonalakat Az azonos csúcsból induló szögfelezőre, az így kapott egyenesek a háromszög szimediánjai. Azt kell belátni, hogy ez a három egyenes egy ponton megy át.)

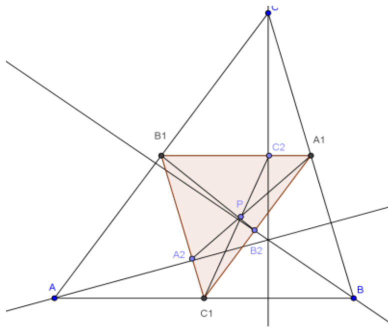


8. Egy ABCD trapézban $AB \parallel CD$, $AB > CD$, legyen M az AD oldal felezőpontja, $O = AC \cap BD$, $N = MO \cap BC$. Bizonyítsuk be, hogy $\frac{CN}{NB} = \frac{b^2}{a^2}$!

(Simon József, Csíkszereda)

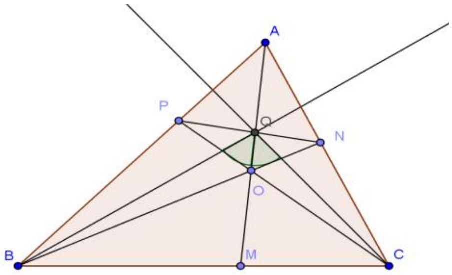


9. Az ABC nem derékszögű háromszög középvonalaiból alkotott $A_1B_1C_1$ háromszög oldalaira bocsássunk merőlegeseket az ABC háromszög A, B, C csúcsaiból. A merőlegesek talppontjai legyenek rendre A_2, B_2, C_2. Bizonyítsuk be, hogy A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy pontban metszik egymást! (Strohmajer)



10. Az ABC háromszögben az AM, BN és CP összefutó egyenesek. (M a BC, N a CA és P az AB oldalon található.) Legyen az AM és NP metszéspontja Q. Bizonyítsuk be, hogy ha a BQM< és MQC< szögek egyenlők, akkor AM merőleges NP-re!

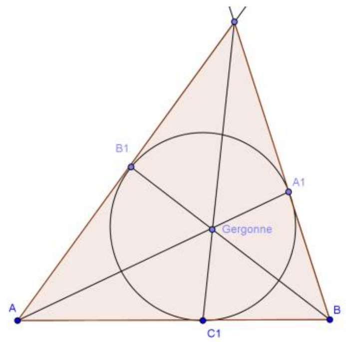
(András Szilárd, Kolozsvár)



Megjegyzés: A címben feltüntetett „pont-pont-pont"-nak itt a vége. Úgy lenne rendben a cím, hogy „Ceva, Menelaosz és András Szilárd". A Tanár Urat nincs szerencsém személyesen ismerni, de a fenti feladatát annál inkább. Sokat kínlódtam vele és nem is tudtam megoldani. Amikor a Tanár Úr megoldását megnéztem, csak arra jöttem rá, hogy a stratégiája sose jutott volna eszembe, csak a hajam hullott volna ki, ha még próbálkozom, másrészt e feladat hatására léptem tovább a „beköszönő" Ceva-tételről a sokkal általánosabb és izgalmasabb Ceva-tételre. Nevezzük „igazi Ceva-tételnek". Mondhatnám úgy is, hogy ez a dolgozat nem jött volna létre, ha nincs ez a feladat, vagyis ha nincs András Szilárd tanár úr. ☺

<u>MEGOLDÁSOK:</u>

1. *Az ABC háromszög beírt köre az oldalakat rendre az A_1, B_1, C_1 pontokban érinti. Bizonyítsuk be, hogy az AA_1, BB_1, CC_1 egyenesek egy pontban metszik egymást! (Gergonne-pont)*

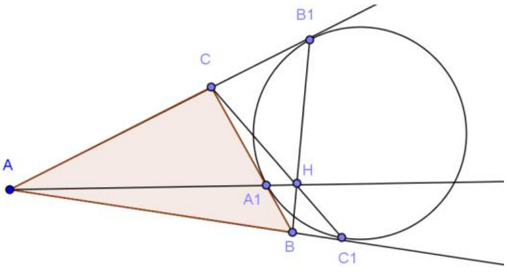


Bizonyítás:

Tudjuk, hogy a beírt kör érintési pontjai a háromszög oldalait (s-a), (s-b), (s-c) nagyságú szakaszokra osztja. $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{s-a}{s-b}\cdot\frac{s-b}{s-c}\cdot\frac{s-c}{s-a}=1$. Így Ceva tételének megfordítása miatt a három egyenes egy ponton megy át.

2. *Az ABC háromszög a oldalát érintő hozzáírt köre érintési pontja legyen az a oldalon A_1, a b oldalegyenesen B_1, a c oldalegyenesen pedig C_1. Bizonyítsuk be, hogy AA_1, BB_1, CC_1 egy ponton mennek át! (H)*

Bizonyítás:

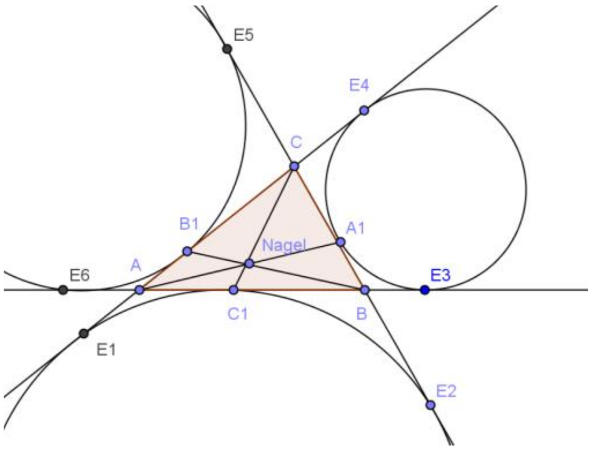


Mivel tudjuk, hogy $AC_1=AB_1=s$, valamint adott körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlőek, ezért :

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{s}{s-c}\cdot\frac{s-c}{s-b}\cdot\frac{s-b}{s}=1.$$

Így Ceva tételének megfordítása miatt a három egyenes egy ponton megy át.

3. *Az ABC háromszög oldalait érintő hozzáírt körök érintési pontjait kössük össze a háromszög szemközti csúcspontjaival! Bizonyítsuk be, hogy ezek a transzverzálisok egy ponton mennek át! (Nagel-pont)*



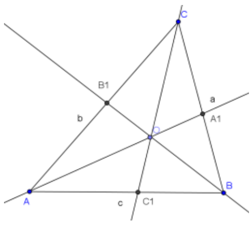
Bizonyítás:

A hozzáírt körök érintési pontjai és az előző feladatban is felhasznált ismeret miatt

$$\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{s-b}{s-a}\cdot\frac{s-c}{s-b}\cdot\frac{s-a}{s-c}=1$$

Így Ceva tételének megfordítása miatt a három egyenes egy ponton megy át.

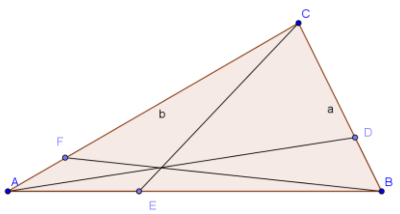
4. *Bizonyítsuk be, hogy a háromszög belső szögfelező egyenesei egy ponton mennek át!*

   Bizonyítás: Felhasználva a szögfelezőtételt :

   $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A}=\frac{b}{a}\cdot\frac{c}{b}\cdot\frac{a}{c}=1$, ami a Ceva tétel megfordításának értelmében pontosan azt jelenti, hogy a három belső szögfelező egy ponton megy át. Ez amúgy a háromszögbe írható kör középpontja.

5. *Bizonyítsuk be, hogy a háromszög kerületfelező egyenesei egy ponton mennek át!*

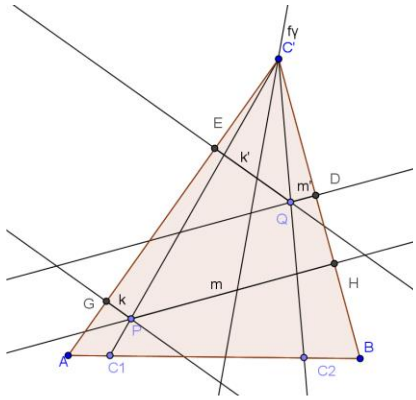
   Bizonyítás: Cél belátni, hogy $\frac{AE}{EB}\cdot\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CF}{FA}=1$.

   Felhasználva, hogy kerületfelező egyenesekről van szó: $\frac{s-b}{s-a}\cdot\frac{s-c}{s-b}\cdot\frac{s-a}{s-c}=1$ valóban.

Így Ceva tételének megfordítása miatt valóban egy ponton mennek át.

6. *Bizonyítsuk be, hogy ha AA_1, BB_1, CC_1 Ceva-egyenesek, és mindegyiket tükrözzük a velük egy csúcsból induló szögfelezőre, akkor a tükörképek is egy pontra illeszkednek!*

   Bizonyítás:

   Legyen CC_1 tükörképe a C-ből induló szögfelezőre CC_2. CC_1 minden P pontjára igaz, hogy az a és b oldaltól mért távolságának aránya m: k . P(a;b) = m : k . CC_2 minden Q pontjára pedig az igaz, hogy az a és b oldaltól mért távolságának aránya

   Q(a;b) = m' : k' = k : m = $\frac{1}{m}:\frac{1}{k}$.

   Legyen P pont a CC_1 és BB_1 szakaszok metszéspontja.

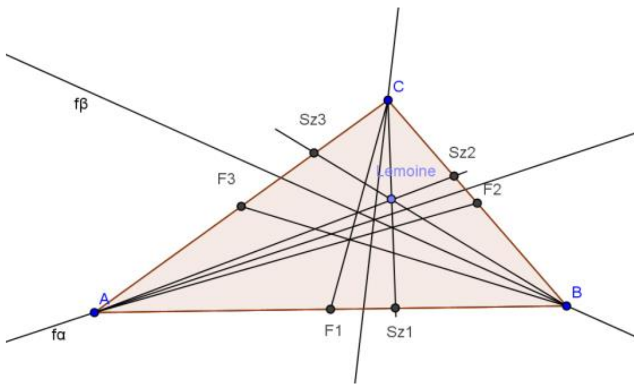
   Legyen P(a; b; c) = m : k : n.

   Ekkor a tükörképek metszéspontja legyen Q és erre Q(a; b; c) = $\frac{1}{m}:\frac{1}{k}:\frac{1}{n}$.

   Vegyük fel P-n keresztül az AA_1 szakaszt. AA_1 bármely pontjának a c és b oldalaktól vett távolságának aránya n: k. Ha AA_1 szakasz tükörképe AA_2 . Mivel tükörkép, ezért minden pontjára igaz, hogy c és b oldalaktól vett távolságának aránya $\frac{1}{n}:\frac{1}{k}$. Mivel Q-ra ez teljesül, ezért Q rajta van AA_2-n.

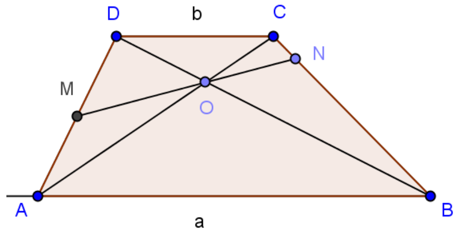
7. *Igazoljuk, hogy a háromszög három szimediánja egy ponton megy át! (Lemoin-pont)*

   Megoldás:

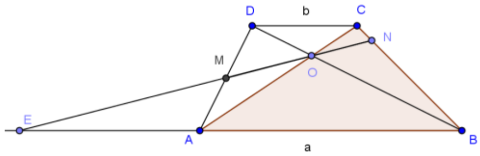
   Mivel a szimedián a súlyvonal tükörképe a megfelelő belső szögfelezőre, és a súlyvonalakról tudjuk, hogy egy pontban metszik egymást, ez a súlypont, ezért az előzőekben bebizonyítottak értelmében a szimediánok is egy pontra illeszkednek. Ez a pont a háromszög Lemoine-pontja.

8. *Egy ABCD trapézban $AB \parallel CD$, $AB > CD$, legyen M az AD oldal felezőpontja,* $O = AC \cap BD$, $N = MO \cap BC$. *Bizonyítsuk be, hogy* $\frac{CN}{NB} = \frac{b^2}{a^2}$*!*

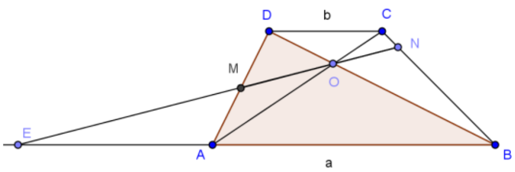


Megoldás:

Hosszabbítsuk meg MN egyenest úgy, hogy E pontban messe az AB oldalegyenest! Alkalmazzuk először Menelaosz tételét ABC háromszögre EN metsző egyenessel!



$\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AO}{OC}\cdot\frac{CN}{NB} = -1$. Innen a keresett $\frac{CN}{NB}$ arányra $\frac{CN}{NB} = -\frac{EA}{BE}\cdot\frac{OC}{AC}$ adódik.



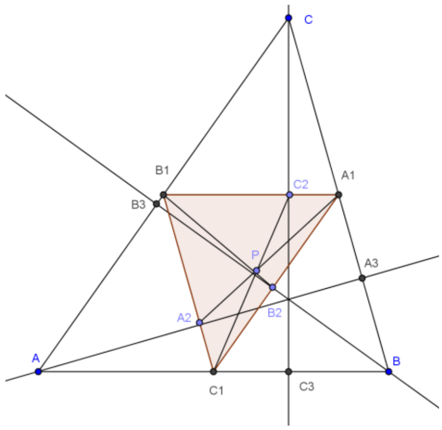
Most alkalmazzuk Menelaosz tételét ABD háromszögre és EO metsző egyenesre!

Ekkor $\frac{BE}{EA}\cdot\frac{AM}{MD}\cdot\frac{DO}{OB} = -1$. Mivel M felezőpont volt, ezért $\frac{AM}{MD} = 1$, $\frac{DO}{OB}$ valamint $\frac{OC}{AC}$ arányok pedig kifejezhetőek a-val és b-vel; $\frac{DO}{OB} = \frac{b}{a}$; $\frac{OC}{AO} = \frac{b}{a}$ szintén, mert $ABO_\Delta \sim DOC_\Delta$. Így $\frac{BE}{EA}\cdot 1\cdot\frac{b}{a} = -1$, azaz $\frac{EA}{BE} = -\frac{b}{a}$. Így

$$\frac{CN}{NB} = -\frac{EA}{BE}\cdot\frac{OC}{AO} = -\left(-\frac{b}{a}\right)\cdot\frac{b}{a} = \frac{b^2}{a^2}.$$

9. *Az ABC nem derékszögű háromszög középvonalaiból alkotott $A_1B_1C_1$ háromszög oldalaira bocsássunk merőlegeseket az ABC háromszög A, B, C csúcsaiból. A merőlegesek talppontjai legyenek rendre A_2, B_2, C_2. Bizonyítsuk be, hogy A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 egyenesek egy pontban metszik egymást!*

Megoldás:

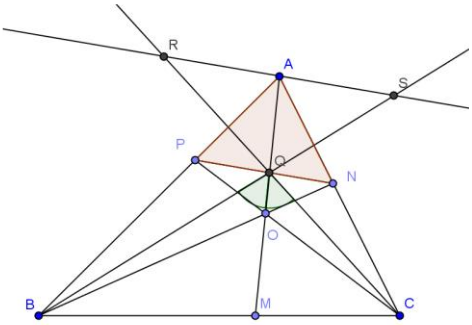


Mivel $A_1B_1C_{1\Delta}$ középvonal-háromszög, ezért A_1, B_1, C_1 oldalfelezőpontok az ABC_Δ –ben. Ceva tételéből tudjuk, hogy $\frac{AC_1}{C_1B}\cdot\frac{BA_1}{A_1C}\cdot\frac{CB_1}{B_1A} = 1$. Legyenek A_3, B_3, C_3 az A,B,C csúcsokból bocsátott merőlegesek talppontjai az ABC_Δ oldalegyenesein! Így ezek magasságvonalak, amelyekről tudjuk, hogy egy ponton mennek át, így Ceva tétele miatt : $\frac{AC_3}{C_3B}\cdot\frac{BA_3}{A_3C}\cdot\frac{CB_3}{B_3A}=1$. Mivel $ABC_\Delta \sim B_1A_1C_\Delta$, $ABC_\Delta \sim AC_1B_{1\Delta}$, $CAB_\Delta \sim A_1C_1B_\Delta$; ezért a megfelelő arányok kiválthatók: $\frac{B_1C_2}{C_2A_1}\cdot\frac{C_1A_2}{A_2B_1}\cdot\frac{A_1B_2}{B_2C_1}=1$. Most már csak az $A_1B_1C_{1\Delta}$ középvonal-háromszögre koncentrálva, ebben a háromszögben az előbb felírt szorzat (a második két tényező felcserélése után) pontosan azt jelenti, hogy $(B_1A_1C_2)(A_1C_1B_2)(C_1B_1A_2)=1$, ami Ceva tételének megfordítása értelmében azt jelenti, hogy C_1C_2, A_1A_2, B_1B_2 egyenesek egy pontban metszik egymást.

10. *Az ABC háromszögben az AM, BN és CP összefutó egyenesek. (M a BC, N a CA és P az AB oldalon található.) Legyen az AM és NP metszéspontja Q. Bizonyítsuk be, hogy ha a BQM< és MQC< szögek egyenlők, akkor AM merőleges NP-re!*

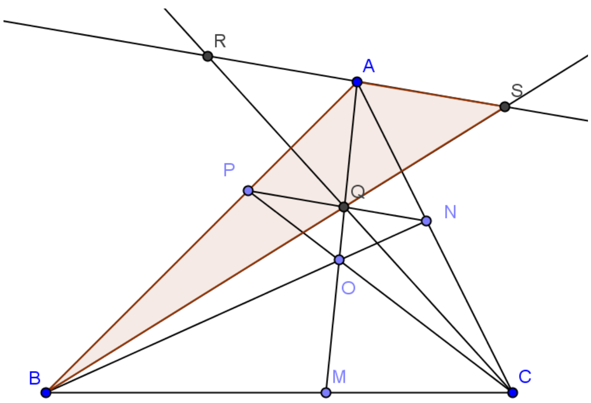
(András Szilárd, Kolozsvár)

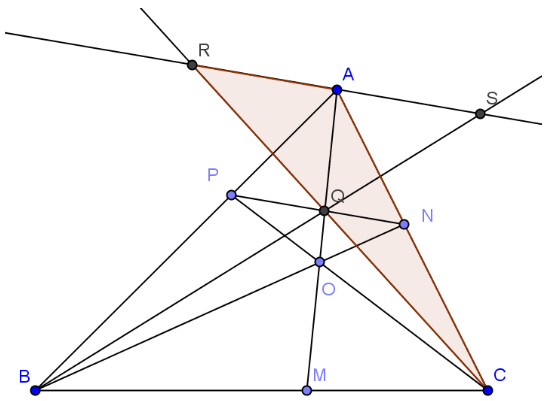
Megoldás: Húzzunk PN-nel párhuzamos egyenest az A csúcson keresztül! Mivel BQM< és MQC< szögek lesznek fontosak, ezért figyeljünk a Q pontra! Messe a frissen felvett PN-nel párhuzamos egyenest BQ egyenese az S, CQ egyenese pedig az R pontban!



Ha be tudnánk látni, hogy RA ugyanakkora, mint AS, akkor készen lennénk.

Kihasználva a párhuzamosságot; hasonló háromszögeket vehetünk észre.





$BAS_\Delta \sim BPQ_\Delta$ miatt $\frac{AS}{PQ}=\frac{c}{BP}$; $CAR_\Delta \sim CNQ_\Delta$ miatt $\frac{RA}{QN}=\frac{b}{NC}$.

Így $\frac{RA}{AS}=\frac{QN\frac{b}{NC}}{PQ\frac{c}{BP}}=\frac{QN\cdot b\cdot BP}{NC\cdot c\cdot PQ}=?$

Másrészt: APNΔ-et és AM, BN, CP, O-ban összefutó egyeneseket tekintve a

„külső pontos” Ceva-tétel értelmében: $\frac{AC}{CN}\cdot\frac{NQ}{QP}\cdot\frac{PB}{BA}=1$.

Azaz: $\frac{b}{CN}\cdot\frac{NQ}{QP}\cdot\frac{PB}{c}=1$

Így $\frac{RA}{AS}=1$. Mivel így A felezi RS-t, valamint a feladat értelmében QA szögfelező,

ezért $QA\perp RS \Rightarrow AM\perp PN$. Ez volt bizonyítandó.

Felhasznált irodalom: Reiman István: Geometria és határterületei

Hajós György: Geometria

Dr. Katz Sándor: Pontok, vonalak, arányok a háromszögben

Lányi Vera

Pécs, 2014-08-14